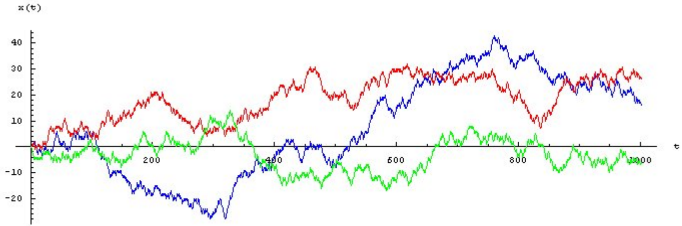
Régularité de processus aléatoires

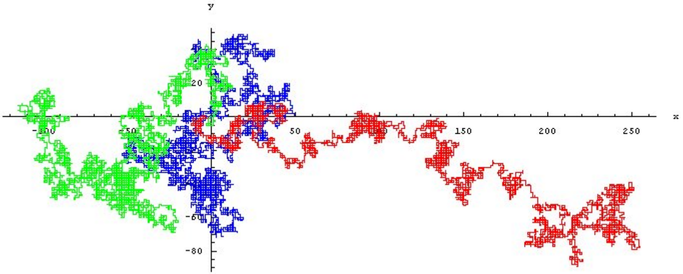
Erick Herbin

École Centrale Paris

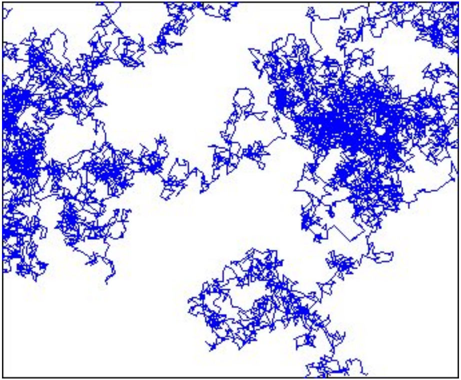
Journées du GDR MASCOT NUM
IHP 19 mars 2009

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$





Marche aléatoire simple sur $\epsilon\mathbb{Z}^2$ lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$



L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur $\mathbb{R}$ est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A);\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$.

L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur $\mathbb{R}$ est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A);\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$.

(i.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints, $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ sont indépendants.

L'approche par le bruit blanc

Le **bruit blanc** sur $\mathbb{R}$ est défini comme le processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A);\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances $\Sigma(A,B) = \lambda(A \cap B)$.

(i.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints, $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ sont indépendants.

(ii.) Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{W}(A \cup B) = \mathbb{W}(A) + \mathbb{W}(B) - \mathbb{W}(A \cap B)$ p.s.

(iii.) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints deux à deux et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, alors on a

$$\mathbb{W}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}(A_n) \quad \text{p.s.}$$

Le processus isonormal

Le **processus isonormal** de $\mathbb{R}$ est défini comme le processus gaussien $W = \{W(f);\ f \in L^2(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}); \quad E[W(h_1)W(h_2)] = \int_{\mathbb{R}} h_1(u)h_2(u)\ du.$$

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$W(\alpha f + \beta g) = \alpha W(f) + \beta W(g) \quad \text{p.s.}$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad \mathbb{W}(A) = W(\mathbb{1}_A).$$

Mouvement brownien

Le **mouvement brownien** est un processus gaussien $B = \{B_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E[B_s\ B_t] = s \wedge t.$$

Mouvement brownien

Le **mouvement brownien** est un processus gaussien $B = \{B_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E[B_s\ B_t] = s \wedge t.$$

- Représentation de Centsov :
  $B_t = \mathbb{W}([0,t]) = W(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} \mathbb{W}(ds)$.
- Intégrale de Wiener : pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut définir

$$\int f(s)\ dB_s = \int f(s)\ \mathbb{W}(ds) = W(f)$$

$$\int_{[0,t]} f(s)\ dB_s = \int_{[0,t]} f(s)\ \mathbb{W}(ds) = W(\mathbb{1}_{[0,t]} f).$$

Premières propriétés

- Autosimilarité : $\forall a > 0$,

$$\{B_{at};\ t \in \mathbb{R}_+\} \stackrel{(d)}{=} \{a^{1/2}\ B_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

- Indépendance des accroissements : $\forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les v.a. $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
- Stationnarité des accroissements : Plus précisement, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s < t$, la loi de la v.a. $B_t - B_s$ est gaussienne centrée de variance $t - s$.
- Continuité : Thm. de Kolmogorov-Centsov
- Autres : martingale, processus de Markov, variations infinies sur tout intervalle, ...

Mouvement brownien fractionnaire (Mandelbrot - Van Ness 1968)

- B^H est un processus gaussien centré de covariance

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E\left[B_s^H B_t^H\right] = \frac{1}{2}\left[s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right]$$

- Représentation à moyenne mobile

$$B_t^H = \int_{-\infty}^{0} \left[(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}\right].\mathbb{W}(du) + \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}.\mathbb{W}(du)$$

- Représentation harmonisable

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}-1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}}.\hat{\mathbb{W}}(d\xi)$$

Propriétés fractales

- Stationnarité des accroissements

$$\left\{B^H_{t+h} - B^H_h;\ t \in \mathbb{R}_+\right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{B^H_t - B^H_0;\ t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

- Autosimilarité

$$\left\{B^H_{at};\ t \in \mathbb{R}_+\right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{a^H B^H_t;\ t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

Propriétés fractales

- Stationnarité des accroissements

$$\left\{B^H_{t+h} - B^H_h;\ t \in \mathbb{R}_+\right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{B^H_t - B^H_0;\ t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

- Autosimilarité

$$\left\{B^H_{at};\ t \in \mathbb{R}_+\right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{a^H B^H_t;\ t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

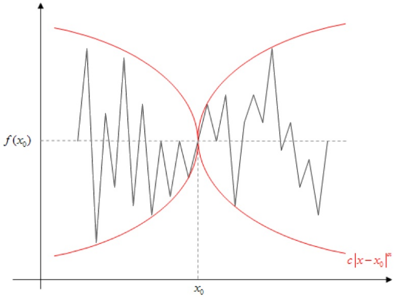
Caractérisation

Le mouvement brownien fractionnaire est l'unique processus gaussien autosimilaire et à accroissements stationnaires.

Régularité höldérienne

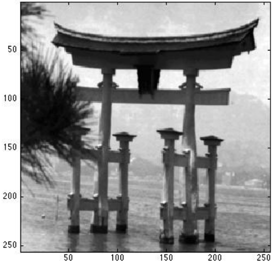
Exposant de Hölder ponctuel

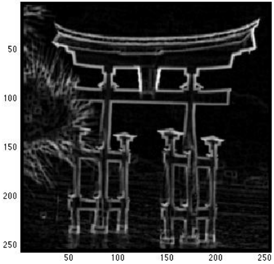
- Comparaison de $f(x) - f(x_0)$ avec $|x - x_0|^\alpha$
- Plus $\alpha(x_0)$ est grand, plus le signal est lisse et plus $\alpha(x_0)$ est petit, plus le signal est irrégulier



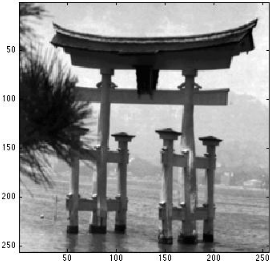
Exposant de Hölder ponctuel

Exemple de détection de contour





Exposant de Hölder ponctuel



Exemple d'interpolation

- bicubique
- avec régularité

Régularité höldérienne du fBm

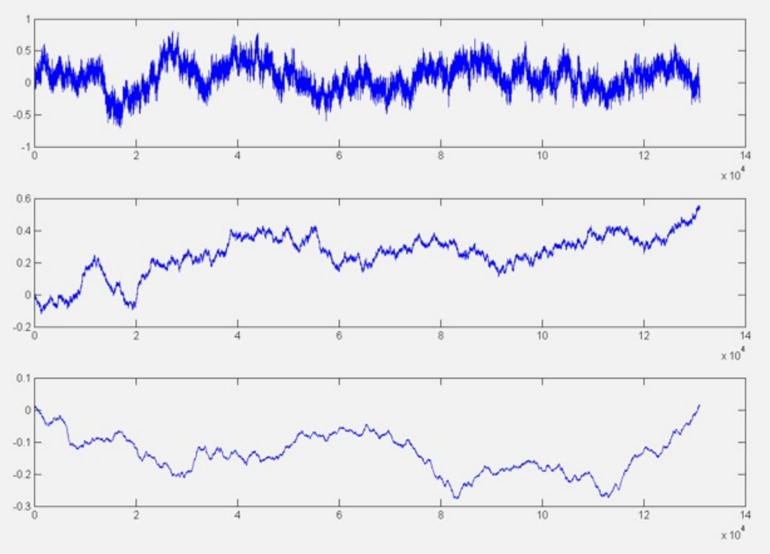
$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{B^H}(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \to 0} \sup_{s,t \in B(t_0,\rho)} \frac{|B_t^H - B_s^H|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{B^H}(t_0) = \sup \left\{ \alpha : \limsup_{\rho \to 0} \sup_{s,t \in B(t_0,\rho)} \frac{|B_t^H - B_s^H|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

Les exposants de Hölder ponctuel et local vérifient

$$\boldsymbol{\alpha}(t_0) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t_0) = H \quad \text{p.s.} \quad \forall t_0$$

Trajectoires de fBm pour $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.7$



2 définitions du mouvement brownien multifractionnaire

- Représentation à moyenne mobile (Peltier et Levy-Vehel 1995)

$$X_t = \int_{-\infty}^{0} \left[(t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} - (-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} \right] .\mathbb{W}(du) + \int_{0}^{t} (t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} .\mathbb{W}(du)$$

  où $H : \mathbb{R}_+ \to]0,1[$ est höldérienne.

- Représentation harmonisable (Benassi, Jaffard et Roux 1998)

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} .\hat{\mathbb{W}}(d\xi)$$

Définitions équivalentes à une fonction déterministe multiplicative près.

Autres représentations du mBm

- Le mBm est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariances

$$E\left[X_s X_t\right] = D\left(H(s)+H(t)\right)\left[|s|^{H(s)+H(t)} + |t|^{H(s)+H(t)} - |t-s|^{H(s)+H(t)}\right]$$

  où D est une fonction déterministe connue.

- $$X_t = \int_{\mathbb{R}} \left[|t-u|^{H(t)-\frac{1}{2}} - |u|^{H(t)-\frac{1}{2}}\right] \mathbb{W}(du)$$

Régularité höldérienne du mBm

L'exposant de Hölder local de X en t_0 est

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) = \tilde{\alpha}_H(t_0) \wedge H(t_0) \quad \text{p.s.}$$

et l'exposant de Hölder ponctuel de X en t_0 est

$$\boldsymbol{\alpha}(t_0) = \alpha_H(t_0) \wedge H(t_0) \quad \text{p.s.}$$

- Si H est régulière, la régularité de X en t_0 vaut $H(t_0)$
- Si H est irrégulière, la régularité de X est celle de H

Propriétés fractales

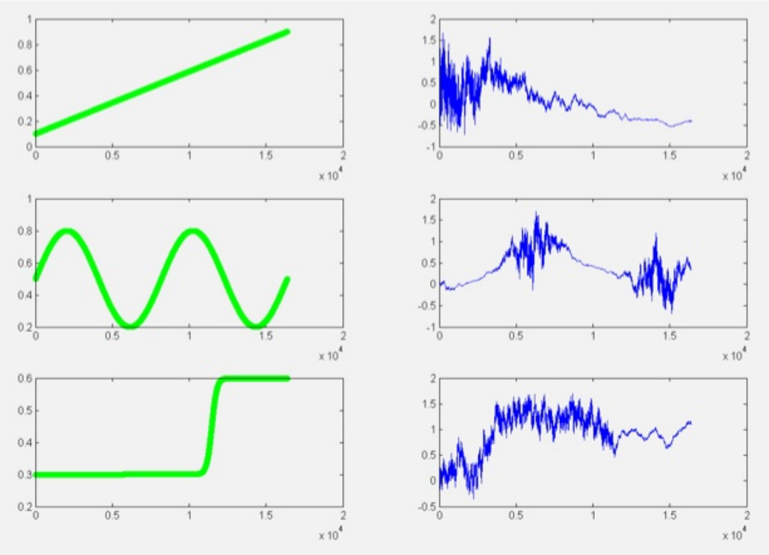
Autosimilarité asymptotique locale

Pour $t_0 \in \mathbb{R}_+$, la loi du processus

$$Y^\alpha(\rho) = \left\{ Y_u^\alpha(\rho) = \frac{X_{t_0+\rho u} - X_{t_0}}{\rho^\alpha}; u \in \mathbb{R}_+^N \right\}$$

converge faiblement lorsque $\rho \to 0$ si $\alpha = H(t_0)$ et $H(t_0) < \alpha_H(t_0)$
Alors, la loi limite est celle d'un fBm de paramètre $H(t_0)$.

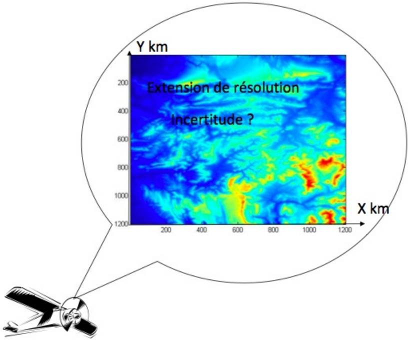
Trajectoires de mBm pour différentes fonctions de régularité



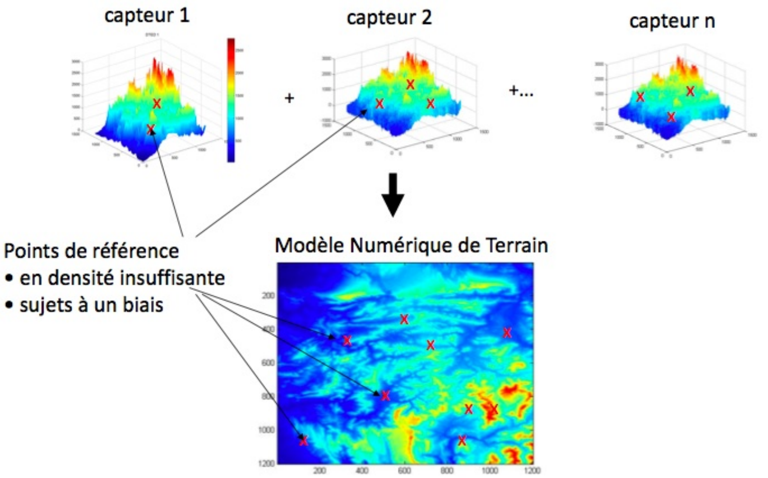
Utilisation en cartographie

L'incertitude en (x, y, z) provient

- de l'échantillonnage discret
- des erreurs de mesure (bruit)
- des paramètres de conversion entre systèmes de coordonnées



Fusion de MNT



Modèle probabiliste des erreurs

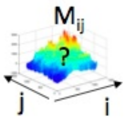
Deux représentations de terrain

1. Un MNT de petite résolution, dont les données sont sûres
   - Grille de référence
2. Un MNT de bonne résolution, moins précis mais avec une bonne dynamique
   - Représentativité des fluctuations

Modèle probabiliste des erreurs

Deux représentations de terrain

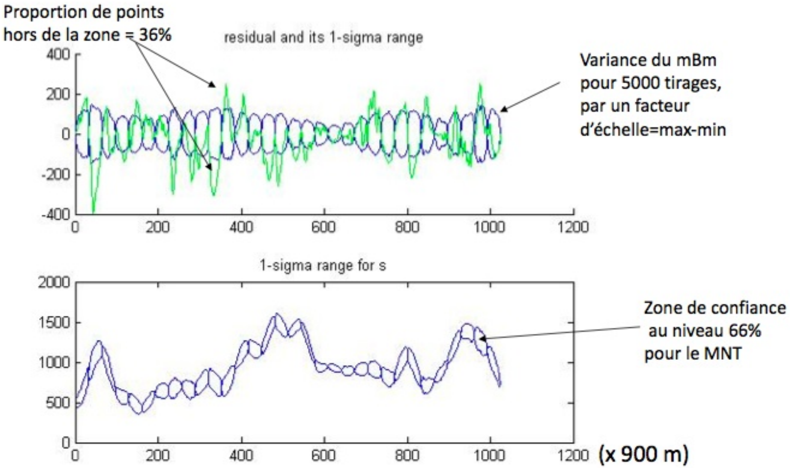
1. Un MNT de petite résolution, dont les données sont sûres
   - Grille de référence
2. Un MNT de bonne résolution, moins précis mais avec une bonne dynamique
   - Représentativité des fluctuations



Processus de fusion

- On cherche à "interpoler" entre les points du 1er, en utilisant la régularité du 2nd
- On utilise un modèle probabiliste d'erreurs superposé à une interpolation lisse

Utilisation d'un pont brownien multifractionnaire



Régularité locale et intégration / dérivation

Constat

α_f n'est pas stable sous l'action d'opérateur intégro-différentiels

Exemple :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\gamma \sin \frac{1}{x^\delta} \end{array} \qquad \text{où } \gamma > \delta + 1 \text{ et } \delta > 0.$$

On a

$$\begin{cases} \alpha_f(0) = \gamma \\ f'(x) \sim x^{\gamma-\delta-1} \cos \frac{1}{x^\delta} \quad \mathcal{V}(0) \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_{f'}(0) = \gamma - \delta - 1$$

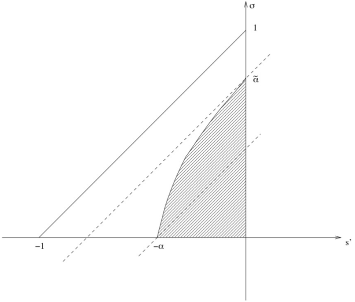
— Comment prédire la valeur de $\alpha_{f'}$ à partir de α_f ?

$\Rightarrow$ **analyse** 2-**microlocale** (J.M. Bony, théorie des EDP).

Définition des espaces 2-μl (Kolwankar - Lévy Véhel - Seuret)

Dans le triangle

$$\left.\begin{array}{c} 0 < s + s' < 1 \\ s < 1 \\ s' < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 < \sigma < 1 + s' \\ -1 < s' < 0 \end{array}\right.$$



où $\sigma = s + s'$,

$$\varphi \in C_{t_0}^{s,s'} \Leftrightarrow \limsup_{\rho \to 0} \sup_{t,u \in B(t_0,\rho)} \frac{|\varphi(t) - \varphi(u)|}{\|t-u\|^{s+s'} \rho^{-s'}} < \infty$$

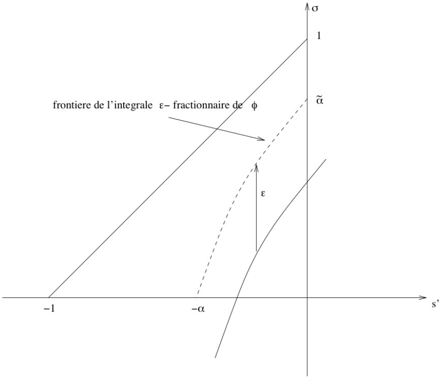
Propriétés de $C_{t_0}^{s,s'}$

- $\left\{(s,s') : \varphi \in C_{t_0}^{s,s'}\right\}$ est convexe
- l'application

$$s' \mapsto \sigma_{t_0}(s') = \sup\left\{\sigma : \limsup_{\rho\to 0} \sup_{t,u\in B(t_0,\rho)} \frac{|\varphi(t)-\varphi(u)|}{\|t-u\|^{\sigma}\rho^{-s'}} < \infty\right\}$$

  est continue
-
$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N, \forall s' < 0; \quad \tilde{\alpha}(t_0) \leq \sigma_{t_0}(s') - s' \leq \alpha(t_0)$$

Exemple : frontière 2-μl des dérivées et intégrations fractionnaires de φ ?



— L'exposant ponctuel de φ' peut être obtenue à partir de la frontière 2-μl de φ.

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit les exposants de Hölder local et ponctuel en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) = \sup\left\{\alpha :\ \limsup_{\rho\to 0} \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t-s\|^\alpha} < \infty\right\}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_X(t_0) = \sup\left\{\alpha :\ \limsup_{\rho\to 0} \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty\right\}$$

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit les exposants de Hölder local et ponctuel en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha :\ \limsup_{\rho \to 0} \sup_{s,t \in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t-s\|^\alpha} < \infty \right\}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha :\ \limsup_{\rho \to 0} \sup_{s,t \in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty \right\}$$

et l'exposant 2-microlocal $(s'; \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s'))$ en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = \sup \left\{ \sigma;\ \limsup_{\rho \to 0} \sup_{s,t \in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t-s\|^\sigma \rho^{-s'}} < \infty \right\}$$

Cas stochastique (H. - Lévy Véhel 2008)

Pour tout $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ continu, on définit les exposants de Hölder local et ponctuel en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) = \sup\left\{\alpha :\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t-s\|^\alpha} < \infty\right\}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_X(t_0) = \sup\left\{\alpha :\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\rho^\alpha} < \infty\right\}$$

et l'exposant 2-microlocal $(s'; \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s'))$ en $t_0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = \sup\left\{\sigma;\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{|X_t - X_s|}{\|t-s\|^\sigma \rho^{-s'}} < \infty\right\}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0)$, $\boldsymbol{\alpha}_X(t_0)$ et $\boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s')$ sont des variables aléatoires. Sous certaines hypothèses, ces exposants ont des valeurs presque sures.

Minoration de la frontière 2-microlocale

Prop :

Soit $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus cadlag. Si pour t_0, il existe $C > 0$ et $\rho_0 > 0$ telles que

$$\forall 0 < \rho < \rho_0, \forall t, u \in B(t_0, \rho); \quad E[X_t - X_u]^\eta \leq C \, \|t-u\|^{N+\mu} \rho^{-\nu}$$

avec $\nu > 0$, $\mu > 0$ et $\nu > 0$.
Alors,

$$\boldsymbol{\sigma}_{t_0}\left(\frac{\nu}{\eta}\right) \geq \frac{\mu}{\eta} \quad \text{p.s.}$$

Frontière 2-microlocale de processus gaussiens

Soit $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu.
On définit

- l'exposant de Hölder local **déterministe**

$$\tilde{\alpha}(t_0) = \sup\left\{\sigma;\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{E\left[X_t - X_s\right]^2}{\|t-s\|^{2\sigma}} < \infty\right\}$$

Frontière 2-microlocale de processus gaussiens

Soit $X = \left\{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\right\}$ un processus gaussien centré continu.
On définit

- l'exposant de Hölder local **déterministe**

$$\tilde{\mathfrak{a}}(t_0) = \sup\left\{\sigma;\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{E\left[X_t - X_s\right]^2}{\|t-s\|^{2\sigma}} < \infty\right\}$$

- la fonction 2-microlocale **déterministe** $s' \mapsto \mathfrak{s}_{t_0}(s')$

$$\mathfrak{s}_{t_0}(s') = \sup\left\{\sigma;\ \limsup_{\rho\to 0}\ \sup_{s,t\in B(t_0,\rho)} \frac{E\left[X_t - X_s\right]^2}{\|t-s\|^{2\sigma}\rho^{-2s'}} < \infty\right\}$$

Frontière 2-μl presque sure en un point

Thm :

Soit $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu. $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N$, la frontière 2-$\mu$l en t_0 de la trajectoire de X est presque surement égale au graphe de $s' \mapsto \sigma_{t_0}(s')$.

Frontière 2-μl presque sure uniformément sur $\mathbb{R}_+^N$

Thm :

Soit $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un processus gaussien centré continu. Presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N; \quad \liminf_{u \to t_0} \tilde{\mathbb{\alpha}}(u) \leq \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) \leq \limsup_{u \to t_0} \tilde{\mathbb{\alpha}}(u)$$

En conséquence, si $t_0 \mapsto \tilde{\mathbb{\alpha}}(t_0)$ est continue, on a presque surement

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N; \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_X(t_0) = \tilde{\mathbb{\alpha}}(t_0)$$

Corollaire :

sous les mêmes hypothèses, presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^N, \forall s' < 0; \quad \tilde{\mathbb{\alpha}}(t_0) + s' \leq \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') \leq \limsup_{u \to t_0} \mathbb{\sigma}_u(s')$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E\left[B_t^H - B_s^H\right]^2 = |t-s|^{2H}$$

Cas académique : fBm

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad E\left[B_t^H - B_s^H\right]^2 = |t-s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t_0) = H \qquad & \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma_{t_0}(s') = H + s' \qquad & \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0 \end{aligned}$$

Cas académique : fBm

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+; \quad E\left[B_t^H - B_s^H\right]^2 = |t-s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t_0) &= H \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma_{t_0}(s') &= H + s' \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0 \end{aligned}$$

Presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = H + s'$$

Cas académique : fBm

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+; \quad E\left[B_t^H - B_s^H\right]^2 = |t-s|^{2H}$$

Calcul facile :

$$\tilde{\alpha}(t_0) = H \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+$$

$$\sigma_{t_0}(s') = H + s' \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0$$

Presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = H + s'$$

Consequence : presque surement,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{B^H}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}_{B^H}(t_0) = H$$

$\Rightarrow$ la régularité est constante le long de la trajectoire.

Mouvement brownien multifractionnaire

Equivalent asymptotique de la covariance du mBm ($\rho \to 0$)

$$\forall s, t \in B(t_0, \rho);$$
$$E\left[X_t - X_s\right]^2 \sim K(t_0).|t-s|^{2H(t_0)} + L(t_0).\left[H(t) - H(s)\right]^2$$

Mouvement brownien multifractionnaire

Equivalent asymptotique de la covariance du mBm ($\rho \to 0$)

$$\forall s,t \in B(t_0,\rho);$$
$$E\left[X_t - X_s\right]^2 \sim K(t_0).|t-s|^{2H(t_0)} + L(t_0).\left[H(t)-H(s)\right]^2$$

Questions :

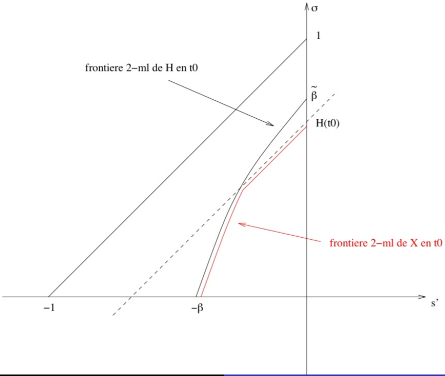
- Peut-on obtenir des valeurs presque sures des exposants de Hölder, uniformément sur $\mathbf{R}_+^N$?
- Quelle est la frontière 2-μl du mBm ?

Prop :

$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$, la frontière 2-$\mu$l du mBm en t_0 est presque surement

$$\forall s' < 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = (H(t_0) + s') \wedge \beta_{t_0}(s')$$

où $s' \mapsto \beta_{t_0}(s')$ est la fonction 2-microlocale de H en t_0.



Résultats presque surs, uniformément sur $\mathbb{R}_+^N$

Thm :

Si $t \mapsto \tilde{\beta}(t)$ est continue, alors

$$P\left\{\forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t_0) = H(t_0) \wedge \tilde{\beta}(t_0)\right\} = 1$$

Rq : Il n'y a pas de résultat similaire pour l'exposant ponctuel.

Thm :

Sous l'hypothèse $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \; H(t_0) < \tilde{\beta}(t_0)$, on a

$$P\left\{\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall s' < 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = H(t_0) + s'\right\} = 1$$

Intégrales de Wiener

Thm :

Soit $X = \{X_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par

$$X_t = \int_0^t \eta(u).dB_u + \psi(t),$$

où η et ψ sont L^2.
On pose $s' \mapsto \beta_{t_0}(s')$ et $s' \mapsto \gamma_{t_0}(s')$ les frontières $2-\mu$l de $\varphi : t \mapsto \int_0^t \eta^2$ et de ψ en t_0.
Alors,

$$\boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = \frac{1}{2}\beta_{t_0}(2s') \wedge \gamma_{t_0}(s') \quad \text{p.s.}$$

Intégrales de Wiener

Exemple :
On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^{\gamma} \ |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

Intégrales de Wiener

Exemple :

On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^{\gamma} \; |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

$$\beta_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta+1} s' + \frac{\gamma}{\delta+1} + 1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta+1} s' + \frac{\gamma}{2\delta+2} + \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

Intégrales de Wiener

Exemple :

On fixe $\eta(t) = \sqrt{|t - t_0|^\gamma \, |\sin(|t - t_0|^{-\delta})|}$ et $\psi(t) = 0$.

$$\beta_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{\delta + 1} + 1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{t_0}(s') = \frac{1}{\delta + 1} s' + \frac{\gamma}{2\delta + 2} + \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}$$

On en déduit

- Exposant de Hölder ponctuel de X en t_0 : $(\gamma + \delta + 1)/2$
- Exposant de Hölder local de X en t_0 : $\gamma/(2 + 2\delta) + 1/2$.

Questions ?

- Régularité locale dans les modèles de substitution ?
- Intégration stochastique par rapport au mBm ?
- EDS dirigée par un processus multifractionnaire ?
- Quels phénomènes fluctuants sont-ils bien représentés par des processus multifractionnaires ?
- Processus Auto-Régulé Multifractionnaire ?